المساحة الجانبية والكلية للهرم المنتظم- حجم الهرم

❁ المساحة الجانبية للهرم المنتظم = $\frac{١}{٢}$ محيط القاعدة x الإرتفاع الجانبى

❁ المساحة الكلية للهرم = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة

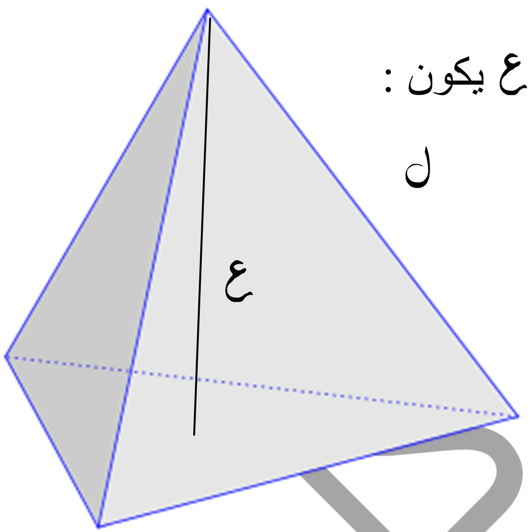
❁ حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة x الإرتفاع

ملاحظات هامة :-

١- إذا لم يكن الهرم منتظم فإن مساحته الجانبية = مجموع مساحات الأوجه الجانبية

٢- حالة خاصة

فى الهرم الثلاثى المنتظم الذى طول حرفه ل وإرتفاعه ع يكون :



ل

(أ) $٢ل^{٢} = ٣ ع^{٢}$

(ب) مساحته الكلية = $ل^{٢} \sqrt{٣}$

(جـ) حجمه = $\frac{\sqrt{٢}}{١٢} ل^{٣}$

٣- إذا علمت أطوال أضلاع مثلث فإنه يمكن حساب مساحته مباشرة كالاتى :

م Δ أ ب جـ = $\sqrt{ع (ع - أب) (ع - ب جـ) (ع - أجـ)}$ حيث ع نصف محيط المثلث

❁ Δ أ ب جـ أطوال أضلاعه ٣ سم ، ٤ سم ، ٥ سم إحسب مساحته .

محيط المثلث = ٣ + ٤ + ٥ = ١٢ سم

نصف المحيط ع = ٦ سم

$م \Delta أبجـ = \sqrt{٦ \,(٦ - ٣)\,(٦ - ٤)\,(٦ - ٥)} = \sqrt{٦ \times ٣ \times ٢ \times ١}$

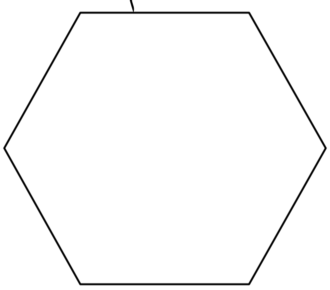
$= \sqrt{٣٦} = ٦$ سم^{٢}

٤- مساحة المضلع المنتظم الذى عدد أضلاعه $ن$ وطول ضلعه س :

$م = \frac{١}{٤} ن$ س^{٢} ظتا $\frac{\pi}{ن}$

❁إحسب مساحة المضلع السداسى المنتظم الذى طول ضلعه ٨ سم .

٨سم



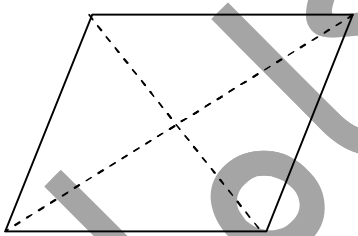
عدد الأضلاع $ن = ٦$

طول الضلع س = ٨سم

$م = \frac{١}{٤} ن$ س^{٢} ظتا $\frac{\pi}{ن} = \frac{١}{٤} \times ٦ \times ٨^{٢}$ ظتا $\frac{١٨٠}{٦}$

$= ٩٦$ ظتا $٣٠ = \frac{٩٦}{ظا ٣٠} = ٩٦\sqrt{٣}$ سم^{٢}

٥- مساحة المعين = $\frac{١}{٢}$ حاصل ضرب طولى قطريه



محيط المعين = طول الضلع $\times$ ٤

❁ معين طولا قطريه ١٢ سم ، ٨ سم إحسب مساحته .

الحل مساحة المعين = $\frac{١}{٢} \times ١٢ \times ٨ = ٤٨$ سم^{٢} .

٦- مساحة المربع = طول الضلع $\times$ نفسه

محيط المربع = طول الضلع $\times$ ٤



مثال ١



الأزهر٢٠١٧/٢٠١٦م ﻡ ﺃﺏﺟﺩ هرم رباعى قائم قاعدته ﺃﺏﺟﺩ مربع طول ضلعه $٨\sqrt{٢}$ سم وطول حرفه الجانبى $٤\sqrt{٦}$ سم أوجد :

١ـ المساحة الجانبية للهرم .

٢ـ المساحة الكلية للهرم .

٣ـ حجم الهرم .



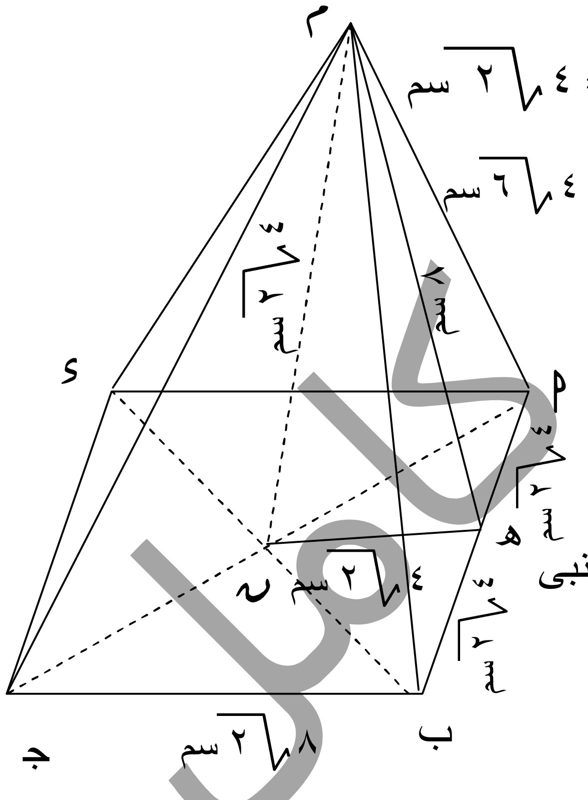
الحل

∵ الهرم م ﺃﺏﺟﺩ هرم قائم قاعدته مربع ∴ الهرم منتظم

∴ الإرتفاع الجانبى م هـ = $\sqrt{(٤\sqrt{٦})^{٢} - (٤\sqrt{٢})^{٢}}$ = ٨ سم

∵ هـ ن = $\frac{١}{٢}$ ب جـ = $٤\sqrt{٢}$ سم (قطعة مستقيمة مرسومة بين منتصفى ضلعين فى مثلث)

∴ إرتفاع الهرم م ن = $\sqrt{(٨)^{٢} - (٤\sqrt{٢})^{٢}}$ = $٤\sqrt{٢}$ سم



❁أولا : إيجاد المساحة الجانبية للهرم

محيط القاعدة = طول الضلع x ٤

= $٨\sqrt{٢}$ x ٤ = $٣٢\sqrt{٢}$ سم

المساحة الجانبية = $\frac{١}{٢}$ محيط القاعدة x الإرتفاع الجانبى

= $\frac{١}{٢}$ x $٣٢\sqrt{٢}$ x ٨ = $١٢٨\sqrt{٢}$ سم^{٢}

❁ثانيا : إيجاد المساحة الكلية للهرم

مساحة القاعدة = طول الضلع x نفسه = $٨\sqrt{٢}$ x $٨\sqrt{٢}$ = ١٢٨ سم^{٢}

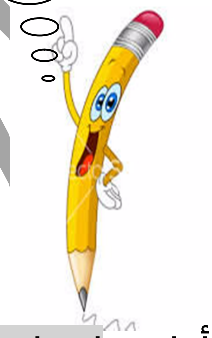
المساحة الكلية للهرم = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة = $١٢٨\sqrt{٢}$ + ١٢٨سم^{٢}

❁ ثالثا : إيجاد حجم الهرم

حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة x الإرتفاع

= $\frac{١}{٣}$ x ١٢٨ x ٤$\sqrt{٢}$ = $\frac{٥١٢}{٣}\sqrt{٢}$ سم^{٣}

مثال ٢



هرم سداسى منتظم طول ضلع قاعدته ١٢ سم وإرتفاعه الجانبى ١٠$\sqrt{٣}$ سم أوجد :-

١- مساحته الجانبية .

٢- مساحته الكلية .

الحل

أولا : إيجاد المساحة الجانبية :

∵ طول ضلع القاعدة س = ١٢ سم

∵ عدد الأضلاع ن = ٦ أضلاع ∴ محيط القاعدة = ٦ x ١٢ = ٧٢ سم

∴ المساحة الجانبية = $\frac{١}{٢}$ محيط القاعدة x الإرتفاع الجانبى = $\frac{١}{٢}$ x ٧٢ x ١٠$\sqrt{٣}$

= ٣٦٠$\sqrt{٣}$ سم^{٢}

ثانيا: إيجاد المساحة الكلية :

نوجد مساحة القاعدة : م = $\frac{١}{٤}$ ن س^{٢} ظتا $\frac{\pi}{ن}$ = $\frac{١}{٤}$ x ٦ x ١٢^{٢} ظتا $\frac{١٨٠}{٦}$

= ٢١٦ ظتا ٣٠ = $\frac{٢١٦}{ظا٣٠}$ = ٢١٦$\sqrt{٣}$ سم^{٢}

المساحة الكلية للهرم = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة

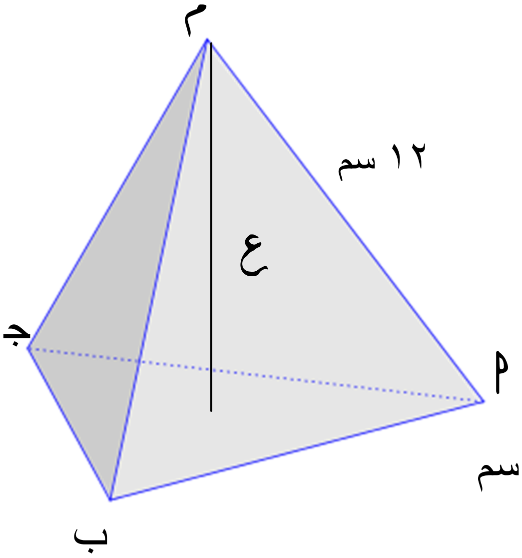
= ٣٦٠$\sqrt{٣}$ + ٢١٦$\sqrt{٣}$ = ٥٧٦$\sqrt{٣}$ سم^{٢}

مثال ٣

هرم ثلاثى منتظم الوجوه طول حرفه ١٢ سم أوجد إرتفاعه ثم اوجد حجمه ومساحته الكلية .



الحل



∵ الهرم ثلاثى منتظم الوجوه

∴ $٢ل^{٢} = ٣ع^{٢}$

$٢ \times ١٢^{٢} = ٣ع^{٢} \Longleftarrow ٣ع^{٢} = ٢٨٨$

$ع^{٢} = \frac{٢٨٨}{٣} = ٩٦ \Longleftarrow ع = \sqrt{٩٦} = ٤\sqrt{٦}$ سم

المساحة الكلية = $ل^{٢}\sqrt{٣} = ١٢^{٢} \times \sqrt{٣} = ١٤٤\sqrt{٣}$ سم^{٢}

حجمه = $\frac{\sqrt{٢}}{١٢} ل^{٣} = \frac{\sqrt{٢}}{١٢} \times ١٢^{٣} = ١٤٤\sqrt{٢}$ سم^{٣}

مثال ٤

الإدارة٢٠١٦/٢٠١٧ : & الأزهر٢٠١٦/٢٠١٧هرم رباعي منتظم مساحة قاعدته ٧٠٠ سم^{٢} وإرتفاعه الجانبى ٢٠ سم أوجد حجمه .

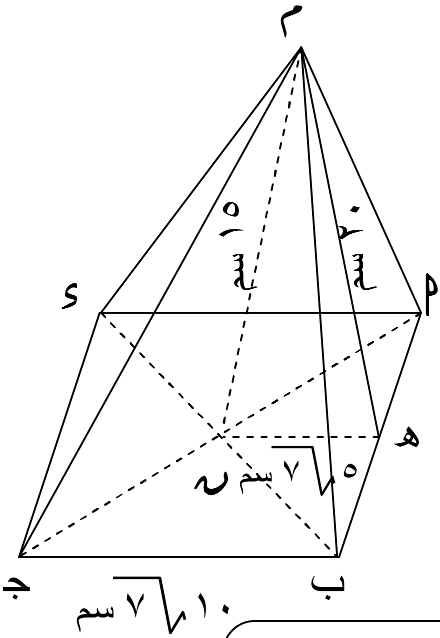


الحل

∵ الهرم رباعى منتظم ∴ قاعدته مربعة الشكل

∴ طول ضلع القاعدة = $\sqrt{٧٠٠} = ١٠\sqrt{٧}$ سم

∵ الإرتفاع الجانبى م هـ = ٢٠ سم



∵ هـ ن = $\frac{١}{٢}$ ب جـ = ٥ $\sqrt{٧}$ سم

(قطعة مستقيمة مرسومة بين منتصفى ضلعين فى مثلث)

∴ إرتفاع الهرم م ن = $\sqrt{(٢٠)^{٢} - (٥\sqrt{٧})^{٢}}$ = ١٥سم

حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة x الإرتفاع

= $\frac{١}{٣}$ x ٧٠٠ x ١٥ = ٣٥٠٠ سم^{٣}

مثال ٥



هرم رباعي منتظم طول ضلع قاعدته ١٨ سم فإذا كان حجمه ١٢٩٦ سم^{٣} فأوجد إرتفاعه الجانبى ومساحته الجانبية.

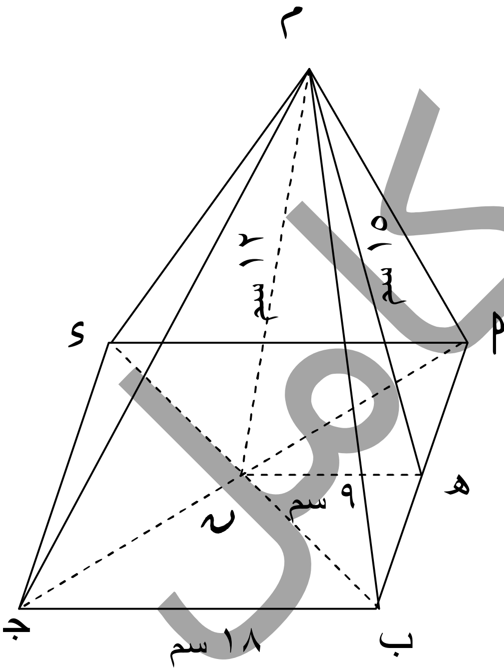
الحل

حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة x الإرتفاع

١٢٩٦ = $\frac{١}{٣}$ x ١٨^{٢} xع

١٢٩٦ = ١٠٨ xع

⟸ ع = $\frac{١٢٩٦}{١٠٨}$ = ١٢ سم



∵ هـ ن = $\frac{١}{٢}$ ب جـ = ٩ سم

(قطعة مستقيمة مرسومة بين منتصفى ضلعين فى مثلث)

∴ الإرتفاع الجانبى م هـ = $\sqrt{١٢^{٢} + ٩^{٢}}$ = ١٥ سم

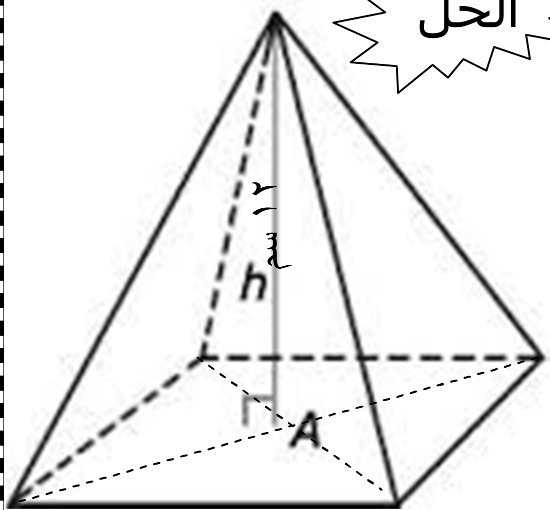
محيط القاعدة = طول الضلع x ٤ = ١٨ x ٤ = ٧٢ سم

∴ المساحة الجانبية = $\frac{١}{٢}$ محيط القاعدة x الإرتفاع الجانبى = $\frac{١}{٢}$ x ٧٢ x ١٥ = ٥٤٠ سم^{٢}

مثال ٦

هرم رباعي إرتفاعه ١٢ سم وقاعدته على شكل معين طولا قطريه ٤ سم ، ٨ سم إثبت أن حجمه يساوى حجم مكعب طول حرفه ٤ سم.

الحل

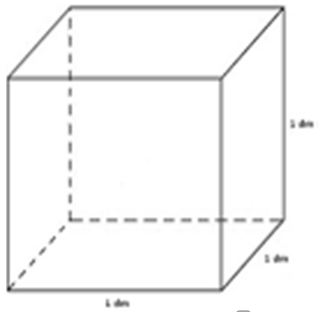


مساحة قاعدة الهرم = $\frac{1}{2}$ حاصل ضرب طولى قطريه

= $\frac{1}{2}$ x ٤ x ٨ = ١٦ سم^{2}

حجم الهرم = $\frac{1}{3}$ مساحة القاعدة x الإرتفاع

= $\frac{1}{3}$ x ١٦ x ١٢ = ٦٤ سم^{3}



حجم المكعب = ل^{3} = ٤^{3} = ٦٤ سم^{3}

∴ حجم الهرم = حجم المكعب

تمارين(٧)

١ أكمل ما يأتى :-

١- هرم رباعى قاعدته معين طولا قطريه ١٢ سم ، ٨ سم وإرتفاعه ١٠ سم فإن حجمه = ... سم^{٣}

٢- هرم منتظم حجمه ١٢ سم^{٣} ومساحة قاعدته ٤ سم^{٢} فإن إرتفاعه = ...سم

٣- هرم رباعى منتظم مساحته الجانبية ٣٠ سم^{٢} وإرتفاعه الجانبى ٥ سم فإن محيط قاعدته = ... سم .

===

٢ هرم ثلاثى إرتفاعه ١٢ سم وقاعدته على شكل مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه ١٨ سم أوجد حجمه. [٣٢٤ $\sqrt{٣}$ سم^{٣}]

===

٣ إحسب لأقرب رقم عشرى واحد حجم هرم خماسى منتظم طول ضلع قاعدته ١٦ سم وإرتفاعه ١٢ سم . [١٧٦١,٨ سم^{٣}]

===

٤ هرم رباعى منتظم حجمه ٤٠٠ سم^{٣} وإرتفاعه ١٢ سم إحسب مساحته الجانبية .

[٢٦٠ سم^{٢}]

===

٥ هرم سداسى منتظم حجمه ٨ $\sqrt{٣}$ سم^{٣} وإرتفاعه ٤ سم أوجد محيط قاعدته. [١٢ سم]

===

٦ م ٲب جـ هرم ثلاثى رأسه م إرتفاعه ٤ $\sqrt{٥}$ سم وقاعدته Δ ٲب جـ حيث ٲب = ٧سم ب جـ = ٨ سم ، ٲجـ = ٩ سم أوجد حجمه . [٨٠ سم^{٣}]

٧ هرم رباعى منتظم طول ضلع قاعدته ٢٠ سم ، وإرتفاعه ١٠ $\sqrt{٣}$ أوجد :

١- المساحة الجانبية . [٨٠٠ سم^{٢}]

٢- حجم الهرم. [$\frac{٤٠٠٠}{٣}\sqrt{٣}$ سم^{٣}]

==

٨ م ٲب جـ ء هرم رباعى منتظم قاعدته ٲب جـ ء حيث ٲب = ١٠ سم وإرتفاعه ١٢سم

أوجــــــــد :

١- الإرتفاع الجانبى للهرم . [١٣ سم]

٢- حجم الهرم . [٤٠٠ سم^{٣}]

٣- المساحة الكلية للهرم. [٣٦٠ سم^{٢}]

==

٩ م ٲب جـ ء هرم رباعى منتظم طول ضلع قاعدته ٢٠ سم وطول حرفه الجانبي ٢٦ سم

أوجــــــــد :

١- الإرتفاع الجانبي للهرم. [٢٤ سم]

٢- إرتفاع الهرم. [٢$\sqrt{١١٩}$سم]

٣- المساحة الكلية للهرم. [١٣٦٠سم^{٢}]

٤- حجم الهرم . [$\frac{٨٠٠}{٣}\sqrt{١١٩}$سم^{٣}]

